UNA DEMOSTRACION DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

por

JOSE MANUEL BAYOD

El Teorema Fundamental del Algebra, o Teorema de D'Alembert, suele probarse en los cursos de variable compleja y en algunos cursos de topología. La demostración que exponemos a continuación tiene el interés de estar apoyada en el Teorema de la Función Inversa para funciones diferenciables sobre $\mathbf{C}$ (un poco más laborioso es detallarlo utilizando en Teorema de la Función Inversa para funciones diferenciables sobre $\mathbf{R}^2$) y sobre argumentos elementales de topología conjuntista.

Hay, desde luego, otras pruebas tan elementales o más que la que aquí se presenta, pero en ésta se utiliza esencialmente el carácter de aplicación abierta que se sigue del Teorema de la Función Inversa y constituye una interesante ilustración de la potencia de este teorema del Análisis. Por otra parte, el poder mostrar consecuencias que se salen de la exposición lógica de una teoría (al igual que se hace con la presentación, totalmente clásica, de los extremos relativos dentro del cálculo diferencial de una o varias variables) tiene su importancia pedagógica indudable y aumenta el interés de la teoría en sí.

La línea argumental consiste en probar que si f es una función polinómica sobre $\mathbf{C}$, $|f| : \mathbf{C} \to R_0+$ (conjunto de los números reales no negativos) es abierta y, además, tiende a $+\infty$ siguiendo la base de filtro de los complementarios de los compactos (es decir, vale $+\infty$ en el punto del infinito); entonces, $|f|$ alcanza su ínfimo y es igual a cero.

Utilizaremos la notación exponencial para los conceptos topológicos y para el complementario: si A es un subconjunto de un espacio topológico, A^f es su frontera, A^i su interior, A^d su derivado y A^c su complementario.

En un espacio normado E (todos los espacios normados se suponen sobre $\mathbf{R}$) indicaremos con $[a, b] = \{ta + (1 - t)\, b \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ el segmento cerrado de extremos a, b.

LEMA 1.

Sea X *un espacio topológico* T_1 *y* A *una parte de* X. *Si* A *es conexo y con más de un punto,* $A \subset A^d$.

Demostración.

Si x es un punto aislado de A, $\{x\}$ es abierto en A. Como además $\{x\}$ es cerrado en A, por ser éste subespacio de un T_1, A no es conexo.

LEMA 2.

Sea E *un espacio normado de dimensión mayor que uno y* A *una parte de* E. *Si* A *es cerrado y sin puntos aislados* ($A = A^d$), Af *tampoco tiene puntos aislados* ($Af \subset Af^d$).

Demostración.

Tomemos un $x \in Af$ y un $\varepsilon > 0$, y veamos que en $Af \cap B(x, \varepsilon)$ hay algún punto distinto de x. Es claro que existen $a \in A \cap B(x, \varepsilon) - \{x\}$, $b \in A^c \cap B(x, \varepsilon)$. Y obsérvese que los puntos a, b pueden elegirse de manera que $x \notin [a, b]$: si $x \in [a, b]$, $\{x - a, x - b\}$ es ligado, luego por la hipótesis sobre la dimensión existe $h \in E$ linealmente independiente de ellos y de norma menor que ε; sea $c = x + h$. Entonces, si $c \in A$, se sustituye a por c, y si $c \in A^c$, se sustituye b por c.

Por consiguiente, el segmento $[a, b]$ está contenido en $B(x, \varepsilon)$, es conexo y corta a A y a A^c, luego corta a Af:

$$\emptyset \neq Af \cap [a, b] \subset Af \cap B(x, \varepsilon) - \{x\}$$

LEMA 3.

Sea E *un espacio normado de dimensión finita,* $X_0 \subset E$ *un conjunto cerrado cuyos puntos son todos aislados* ($X_0^d = \emptyset$), F *un espacio normado de dimensión mayor que uno,* $f : E - X_0 \to F$ *una aplicación continua, abierta y prolongable por continuidad a* $\overline{f} : E \to F$. *Entonces* $\overline{f}$ *es también abierta.*

Demostración.

Basta con probar que si $x_0 \in X_0$, $\overline{f}$ transforma un entorno abierto suyo, U, en un entorno de $\overline{f}(x_0)$.

Tómese una bola cerrada $K = B[x_0, \varepsilon]$ contenida en U y que no contenga a ningún otro punto de X_0. Entonces, $\overline{f}(K)$ es compacto y conexo; y con más de un punto, ya que su interior no es vacío, pues para cada $x \in K^i - \{x_0\}$, $K - \{x_0\}$ es entorno de x, luego $f(x) \in \overline{f}(K)^i$.

Por el Lema 1, $\overline{f}(K)$ carece de puntos aislados, y si $\overline{f}(x_0) \in \overline{f}(K)f$ (en caso contrario, se termina la demostración), por el Lema 2 hay una sucesión $(y_n)_{n \in N}$ en $\overline{f}(K) - \{\overline{f}(x_0)\}$ que tiende a $\overline{f}(x_0)$. Sea para cada n natural, $x_n \in K$ tal que $\overline{f}(x_n) = y_n$. Entonces $x_n \in Kf$, ya que si $x_n \in K^i$, como $x_n \neq x_0$, $\overline{f}(K)$ es entorno de $\overline{f}(x_n)$, contra la elección de los y_n.

Y como Kf es compacto, alguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en Kf : $x_{n_i} \to x \in$ Kf, luego $f(x) = \overline{f}(x_0)$, con $x \neq x_0$, y U — $\{x_0\}$ entorno de x, luego $\overline{f}$(U) es entorno de $f(x) = \overline{f}(x_0)$.

Proposición 1.

Si f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es una función polinómica de grado mayor o igual que uno, es una aplicación abierta.*

Demostración.

Para cada $z \in \mathbb{C}$, $f'(z)$ es otra aplicación polinómica no nula y, por tanto, se anula a lo más en un conjunto finito de puntos, que llamaremos X_0.

Aplicando entonces a $g : X_0{}^c \to \mathbb{C}$ (restricción de f) el Teorema de la Función Inversa, se sigue que g es abierta, y por el Lema 3, que f es abierta, c. q. d.

Obsérvese que la demostración de la Proposición 1 se extiende a *todas* las funciones analíticas.

LEMA 4.

Si X *es un espacio de Hausdorff localmente compacto y* f : X $\to \mathbb{R}$ *es continua y vale* $+\infty$ *en el punto del infinito,* f *alcanza su ínfimo.*

Demostración.

Tomando un $x_0 \in$ X cualquiera, y un compacto K tal que $f(x) > f(x_0)$ para todo $x \in$ K^c,

$$\inf_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in K} f(x)$$

que se alcanza para un punto de K.

Proposición 2.

Si f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es una aplicación polinómica de grado mayor o igual que uno,* $|f|$ *alcanza su ínfimo.*

Demostración.

Basta observar que $|f|$ cumple la condición del Lema 4.

LEMA 5.

Si E *es un espacio normado,* X *un espacio topológico y* f : X $\to$ E *es una aplicación abierta, la composición de* f *con la norma de* E, $||f||$: X $\to$ $\to \mathbb{R}_0+$, *no alcanza su ínfimo a menos que éste sea cero.*

Demostración.

Obsérvese, en primer lugar, que la aplicación norma es abierta, ya que la imagen de la bola abierta $B(a, r)$ es $(||a|| - r, ||a|| + r) \cap \mathbf{R}_0+$.

Entonces, $||f||(X)$ es abierto en $\mathbf{R}_0+$, y si su ínfimo es distinto de cero no lo alcanza, ya que entonces $||f||(X)$ es abierto en $\mathbf{R}$.

TEOREMA DE D'ALEMBERT.

Todo polinomio con coeficientes complejos y de grado mayor o igual que uno, tiene alguna raiz en $\mathbf{C}$.

Demostración.

Es consecuencia de las Proposiciones 1 y 2 del Lema 5.

Dpto. Teoria de Funciones,
Facultad de Ciencias.
Santander.